Besicovitchin peitelause

Tommy Ryytty

8. toukokuuta 2001

Sisältö

Luku 1

Besicovitchin peitelause

1.1 Johdanto

Besicovitchin peitelause on osoittautunut käyttökelpoiseksi erityisesti differentiaalilaskennan sekä myös muun analyysin parissa. Sitä käytetään myös toisten peitelauseiden todistuksissa, kuten esimerkiksi Vitalin peitelauseen yleisemmässä tapauksessa. Alkuperäinen Besicovitchiltä (1945) lähtöisin oleva todistus oli $\mathbb{R}^n$:n palloille. Tai tarkasti ottaen alkuperäinen todistus oli tason kiekoille ja se sisälsi vain niin sanotun kakkososion todistuksesta (katso todistusta alempaa). Tulokseksi Besicovitch sai, että tarvitaan 22 erillistä palloperhettä joukon peittämiseen. Jäljempänä esitetty todistus on hieman yleisemmälle tapaukselle, jossa käsiteltävien joukkojen ei tarvitse olla palloja. Tärkein ehto joukoille on, että kappaleet eivät saa olla liian "litteitä" toisin sanoen niillä täytyy olla "tarpeeksi" sisäpisteitä. Lauseessa oletetaan edelleen, että käsiteltävä avaruus on $\mathbb{R}^n$, mikä ei ole kuitenkaan välttämätön edellytys. Lause toimii yleisemmässäkin avaruudessa. Todistus on tällöin varsin erilainen ja vaatisi pidempää pohjustusta aiheeseen. Yleisemmän tapauksen todistus löytyy esimerkiksi Morsesta ja Federeristä. Besicovitchin ja Morsen alkuperäisten tekstien matemaattinen merkintätapa on hieman vanhahtava, josta johtuen niiden lukeminen on työlästä.

Esitellään aluksi tarvittavia työkaluja.

1.2 Määritelmiä

1.2.1 Määritelmä (Etäisyys ja halkaisija)

Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$. Pisteiden $x, y \in A$ välinen *etäisyys* on d(x,y)=||x-y||, missä ||.|| on normaali euklidinen normi. Joukon *halkaisija* on $d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$. Jos joukko on tyhjä, joukon halkaisija on nolla.

1.2.2 Määritelmä (Avoin ja suljettu pallo)

$\mathbb{R}^n$:n avoin pallo on $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$, missä $y \in \mathbb{R}^n$. Suljettu saadaan vastaavasti, ja on $\overline{B}(x, r) = \{y : d(x, y) \leq r\}$. Joukon $\mathbb{R}^n$ pallopinta on $S(x, r) = \{y : d(x, y) = t\}$.

Seuraavaksi käydään läpi palanen mittateoriaa.

1.2.3 Määritelmä

Olkoon X joukko ja Γ perhe X:n osajoukkoja eli joukkoluokka. Γ on *σ-algebra joukossa* X, jos

(1) $\emptyset \in \Gamma$
(2) Jos $A \in \Gamma$, niin $A^c \in \Gamma$
(3) Jos $A_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N}$, niin $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Gamma$.

1.2.4 Määritelmä (Mitta)

Olkoon Γ X:n σ-algebra. Nyt kuvaus $\mu : \Gamma \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ on mitta, jos

(1) $\mu(A) \geq 0$ kaikille $A \in \Gamma$
(2) $\mu(\emptyset) = 0$
(3) μ on numeroituvasti additiivinen:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \text{ pistevieraille } A_i \in \Gamma, i \in \mathbb{N}.$$

1.2.5 Määritelmä ($\mathbb{R}^n$:n välit)

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoitettu *avoin väli* on

$$I = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_k < x_k < b_k, k = 1, \dots, n\}$$

missä $a_k, b_k \in \mathbb{R}^n$ ja $a_k < b_k$. Olkoon $\mathcal{K}$ joukkoluokka, joka sisältää kaikki $\mathbb{R}^n$ rajoitetut avoimet välit ja tyhjän joukon sekä kuvaus $\lambda : \mathcal{K} \to [0, \infty]$ siten, että

$$\lambda(\emptyset) = 0, \qquad \lambda(I) := (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n).$$

1.2.6 Määritelmä (Lebesguen mitta)

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Nyt joukon A Lebesguen ulkomitta on

$$m_n^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) : A \subset \cup_j I_j, \ \ I_j \in K\}.$$

Lebesguen mitta saadaan rajoittumalla mitallisiin joukkoihin eli $\mathcal{L}^n(A) = m_n^*(A)|_{\mathcal{M}^n}$, missä $\mathcal{M}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n mitallisten joukkojen perhe.

1.2.7 Määritelmä (Konveksi verho)

Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *konveksi verho* on pienin mahdollinen joukko K jolle pätee kaikilla $a, b \in K$, $J(a, b) \subset K$, missä ja $J(a, b)$ on pisteiden a ja b välinen jana.

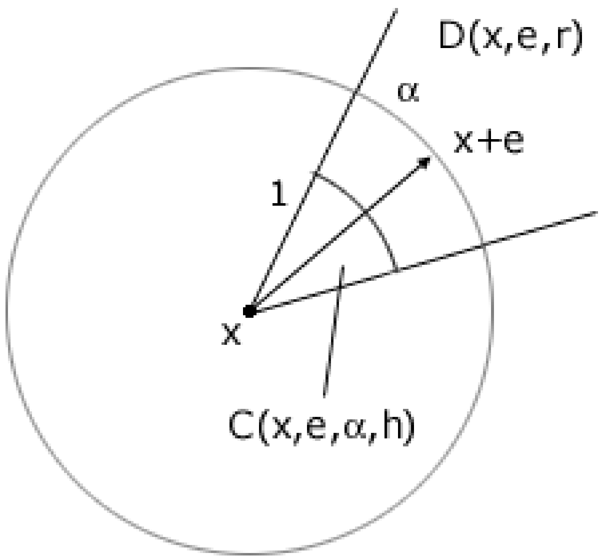
1.2.8 Määritelmä (Kartio)

Olkoon $D(x, e, r) \subset \mathbb{R}^n$ joukon $\{x\} \cup B^{n-1}(x + e, r)$ konveksi verho, missä $B^{n-1}(x + e, r)$ on (n-1)-ulotteinen pallo, joka on kohtisuorassa yksikkövektoria e vastaan ts. $B^{n-1}(x + e, r) = B^n(x + e, r) \cap \{y : (y - (x + e)) \cdot e = 0\}$ Nyt $C(x, e, \alpha, h) = B^n(x, h) \cap D(x, e, r)$, missä r on valittu siten, että pinnan $D(x, e, r) \cap S^{n-1}(x, 1)$ H^{n-1}-mitta on α.

Kyseessä on siis jonkinlainen n-ulotteinen kartio (kts. kuva 1.1).

1.2.9 Määritelmä (Mahtavuus)

Joukon A mahtavuus, card(A), on joukon A alkioiden lukumäärä, mikäli alkioita on äärellinen määrä. Olkoon card(A)=$\aleph_0$ ($\aleph_0$:aa sanotaan kardinaaliluvuksi), mikäli voidaan muodostaa bijektio $\mathbb{N} \to A$ (ts. A on yhtä mahtava $\mathbb{N}$:n kanssa, A on numeroituva) ja card(A) = c, mikäli voidaan muodostaa bijektio $\mathbb{R} \to A$. Tällöin A on ylinumeroituva. On myös olemassa näitä suurempia kardinaalilukuja, mutta tässä esityksessä ei ole tarpeellista puuttua niihin.



Kuva 1.1: Kaksiulotteinen kartio

1.2.10 Määritelmä (Karakteristinen funktio χ)

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. *Karakteristinen funktio* $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ on

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jos } x \in A \\ 0 & \text{, jos } x \notin A \end{cases}.$$

1.3 Lause (Besicovitchin peitelause)

Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $c, \alpha \in \mathbb{R}, c > 0$ ja $\alpha > 0$, on olemassa luonnolliset luvut $P(n, c, \alpha)$ ja $Q(n, \alpha, c)$ siten, että seuraava pätee. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ perhe $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja siten, että $\sup\{d(F) : F \in \mathcal{F}\} < \infty$ ja $c, \alpha \in \mathbb{R}$, siten, että

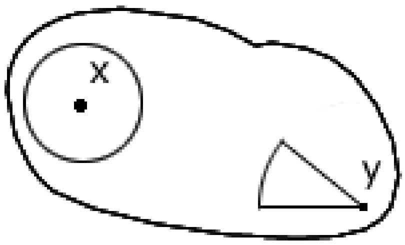
$$\forall x \in A \quad \exists F \in \mathcal{F} \text{ siten, että } B(x, cd(F)) \subset F, \text{ missä } d(F) > 0,$$

ja

$$\forall y \in F \quad \text{ on } C(y, e, \alpha, cd(F)) \subset F$$

missä $e = x - y$.

1) Tällöin $\exists F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{F}$ siten, että



Kuva 1.2: Ehdoista

$$A \subset \bigcup_i F_i \text{ ja } \sum \chi_{F_i} \leq P(n,c,\alpha).$$

2) On olemassa perheet $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{Q(n,\alpha,c)} \subset \mathcal{F}$, jotka peittävät A:n siten, että $\mathcal{F}_i$:t ovat erillisiä ts.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q(n,c,\alpha)} \bigcup F_i$$

ja

$$F \bigcap F' = \emptyset, \text{ kun } F, F' \in \mathcal{F}_i \text{ ja } F \neq F'$$

Huomautus: Siis ehdoissa vaaditaan, että pistettä x vastaa joukko F(x) siten, että kyseiseen pisteeseen ("keskipiste") voidaan asettaa vaaditun kokoinen pallo suhteessa joukon halkaisijaan. Lisäksi jokaiseen joukon F(x) pisteeseen pitää voida asettaa "keskipistettä" kohti osoittava kartio siten, että kartio kuuluu joukkoon F(x) (kts. kuva 1.2).
Todistus: Oletetaan aluksi, että A on rajoitettu ja laajennetaan lopussa tarkastelu ulottumaan rajoittamattomille joukoille.
Olkoon $M_1 = \sup\{d(F) : F \in \mathcal{F}\} < \infty$
Valitaan kullekin $x \in A$, $F(x) \in \mathcal{F}$ s.e. $B(x, cd(F(x))) \subset F(x)$ (*)
Valitaan $x_1 \in A$ siten, että $d(F_1) \geq cM_1$, missä $F_1 = F(x_1)$.

Oletetetaan, että $x_1, \dots, x_j \in A$ on valittu siten, että kun $F_i = F(x_i)$, niin

$$x_{k+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_i \text{ kaikilla } k = 1, \dots, j-1$$

ja $d(F_i) \geq cM_1$ kaikilla $i = 1, \dots, j$. Jos

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} F_i \neq \emptyset,$$

niin valitaan

$$x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} F_i \text{ s.e. } d(F_j + 1) \geq cM_1,$$

mikäli tällainen x_{j+1} löytyy. Joukon A ollessa rajoitettu sen Lebesguen mitta on äärellinen. Koska $d(F_i) \geq cM_1$, niin $B(x_i, c^2 M_1) \subset F_i$ oletuksien perusteella. Lisäksi pallot $B(x_i, \frac{1}{2}c^2 M_1)$ ovat erillisiä . Tämä seuraa siitä, että keskipisteiden etäisyys täytyy olla konstruktion nojalla vähintään $c^2 M_1$. Näiden pallojen mitta on $\mathcal{L}^n(B(0, (c^2/2)M_1)) > 0$. Nyt tästä seuraa, että kun joukkoja F_i otetaan tarpeeksi suuri määrä, niin ne jossain vaiheessa peittävät A:n ja prosessi pysähtyy. Näin saadaan äärellinen jono $x_1, \dots, x_{k_1}$.
Olkoon seuraavaksi

$$M_2 = \sup\{d(F) : x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} F_i\}$$

Valitaan

$$x_{k_1+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} F_i \text{ s.e. } d(F_{k_1+1}) \geq cM_2$$

ja jatketaan yllä olevaan tapaan induktiivisesti valitsemalla $F_{j+1} \in \mathcal{F}$ ja

$$x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} F_i \text{ s.e. } d(F_{j+1}) \geq cM_2$$

Edellä mainittujen perustelujen nojalla prosessi pysähtyy jossain vaiheessa ja saadaan luku k_2. Jatkamalla eteenpäin saadaan kasvava jono kokonaislukuja $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$, laskeva jono positiivisia lukuja M_i s.e. $M_{i+1} \leq cM_i$, jono pisteitä x_i sekä näihin liittyviä joukkoja F_i.
Olkoon

$$I_j = \{k_{j-1} + 1, \dots, k_j\} \qquad j = 1, 2, \dots$$

Nyt

(1) $cM_j \leq d(F_i) \leq M_j$, kun $i \in I_j$

(2) $x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{j} F_i$, kun $j = 1, 2, \ldots$

(3) $x_i \in A \setminus \bigcup_{m \neq \{k,k+1\}} \bigcup_{j \in I_m} F_j$, kun $i \in I_k$.

Todistetaan (1). Koska

$$M_j = \sup\{d(F) : x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_{j-1}} F_i\}$$

niin $d(F_i) \leq M_j$, kun $i > k_{j-1}$. Konstruktiosta seuraa, että $d(F_i) \geq cM_j$, kun $i \leq k_j$.

(2) seuraa suoraan konstruktiosta.

Todistetaan (3). Kohdan (2) nojalla

$$A \setminus \bigcup_{m<k} \bigcup_{j \in I_m} F_j = A \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} F_j \ni x_i.$$

Olkoon $m > k+1$, $j \in I_m$ ja $i \in I_k$. (1):stä ja konstruktion ominaisuuksista seuraa, että

$$\ldots \leq d(F_{t+1}) \leq M_{t+1} \leq cM_t \leq d(F_t) \leq M_t \leq cM_{t-1} \leq d(F_{t-1}) \leq \ldots$$

ja tästä saadaan, että

$$d(F_{t+1}) \leq cd(F_{t-1})$$

Konstruktiosta ja ylläolevasta saadaan $d(x_i, x_j) > cd(F_i) \geq d(F_j)$, joten $x_i \notin F_j$. Siis (3) on todistettu.

Koska $c \leq 1/2 < 1$ $(B(x, cd(F)) \subset F)$, niin $M_i \to 0$. Tällöin (1):stä seuraa, että $d(F_i) \to 0$, josta saadaan, että

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

Sillä jos löytyy $x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, niin joukolla on halkaisija $d(F(x)) > 0$. Koska $M_i \to 0$, niin jossain vaiheessa x on tullut valituksi konstruktion luonteesta johtuen.

Oletetaan, että y kuuluu joukkoihin F_i p:llä i:n arvolla, toisin sanoen

$$y \in \bigcap_{i=1}^{p} F_{m_i}$$

Lauseen ensimmäisen osion todistamiseksi riittää todistaa, että $p \leq P(n, c, \alpha)$.

Osoitetaan ensin, että

$$card(j : I_{2j} \cap \{m_i : i = 1, \dots, p\} \neq \emptyset) \leq N(n, \alpha)$$

Jos yllä oleva on totta, niin symmetrisyyden nojalla pätee, että

$$card(j : I_{2j+1} \cap \{m_i : i = 1, \dots, p\} \neq \emptyset) \leq N(n, \alpha),$$

jolloin

$$card(j : I_j \cap \{m_i : i = 1, \dots, p\} \neq \emptyset) \leq 2N(n, \alpha)$$

Olkoot s, t, $2p = s \neq t = 2q$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$ sellaisia, että on olemassa

$$k \in I_s \bigcap \{m_i : i = 1, \dots, p\}$$

ja

$$l \in I_t \bigcap \{m_i : i = 1, \dots, p\}$$

Koska $C(y, e_k, \alpha, cd(F_k)) \subset F_k$ ja (3) pätee, niin

$$x_l \notin C(y, e_k, \alpha, cd(F_k)).$$

Toisaalta samoin perustein saadaan

$$x_k \notin C(y, e_l, \alpha, cd(F_l)).$$

Merkitään

$$x'_k = (x_k - y)/||x_k - y|| \text{ ja } x'_l = (x_l - y)/||x_l - y||.$$

Nyt on voimassa, että

$$x'_k \in C(0, e_k, \alpha, 1) \backslash C(0, e_l, \alpha, 1) \text{ ja } x'_l \in C(0, e_l, \alpha, 1) \backslash C(0, e_k, \alpha, 1)).$$

Edellisen nojalla $d(x'_k, x'_l) > S$, jossa S on positiivinen nollasta eroava luku. Koska pallon $B(0,1)$ reunalla on äärellinen H^{n-1} mitta, niin tällaisia pisteitä x'_k, x'_l mahtuu vain äärellinen pelkästään α:sta ja n:stä riippuva määrä. Täten voidaan valita tämä luku $N(n,\alpha)$:ksi.

Nyt riittää näyttää, että

$$card(I_j \cap \{m_i : i = 1, \dots, p\}) \leq R(n,c) \quad j = 1, 2, \dots .$$

Kiinnitetään j ja kirjoitetaan

$$I_j \cap \{m_i : i = 1, \dots, p\} = \{l_1, \dots, l_q\}.$$

Nyt (1):n ja (2):n sekä ehdon $B(x_i, cd(F_i)) \subset F_i$ nojalla pallot $B(x_{l_i}, (c^2/2)d(F_{l_i}))$ ovat erillisiä, sillä nyt pallojen säde on maksimissaan $(c^2/2)M_j$ ja $|x_{l_i} - x_{l_k}| > c^2 M_j$, kun $i \neq k$. Nyt on selvästi voimassa $(c^3/2)M_j \leq (c^2/2)d(F_{l_i})$. Lisäksi joukot F_{l_i} mahtuvat palloon $B(y, M_j)$.
Olkoon $\beta(n) = \mathcal{L}^n(B(0,1))$. Tällöin

$$\begin{aligned} q\beta(n)((c^3/2)M_j)^n &\leq \sum_{i=1}^{q} \mathcal{L}^n(B(x_{l_i}, (c^2/2)d(F_{l_i})) \\ &\leq \mathcal{L}^n(B(y, M_j)) = \beta(n)M_j^n. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$q \leq \left(\frac{2}{c^3}\right)^n = R(n,c).$$

Yhdistämällä saadut tulokset saadaan, että

$$p \leq 2R(n,c)N(n,\alpha) = P(n,c,\alpha),$$

(2) osan todistus:

Olkoon $F_1, F_2, \dots$ ensimmäisessä osassa määritellyt joukot. Kaikille $\epsilon > 0$ on ainoastaan äärellinen määrä joukkoja F_i, joille $d(F_i) > \epsilon$, koska A on rajoitettu ja $F_i \supset B(x_i, cd(F_i))$. Täten voimme olettaa, että $d(F_1) \geq d(F_2) \geq \dots$
Olkoon $F_{1,1} = F_1$ ja jatketaan tästä induktiivisesti siten, että jos $F_{1,1}, \dots, F_{1,j}$ on valittu, niin $F_{1,j+1} = F_k$, missä k on pienin kokonaisluku siten, että

$$F_k \bigcap \bigcup_{i=1}^{j} F_{1,i} = \emptyset.$$

Jatketaan tätä niin pitkään kuin mahdollista, jolloin saadaan äärellinen tai numeroituva erillisten joukkojen muodostama perhe

$$\mathcal{F}_1 = \{F_{1,1}, F_{1,2}, \dots\}.$$

Jos perhe $\mathcal{F}_1$ ei peitä A:ta, määritellään seuraavaksi $F_{2,1} = F_k$, missä k on pienin kokonaisluku, jolle $F_k \notin \mathcal{F}_1$. Jatketaan tästä jälleen induktiivisesti siten, että $F_{2,j+1} = F_k$, missä k on nyt pienin kokonaisluku, jolle

$$F_k \bigcap \bigcup_{i=1}^{j} F_{2,i} = \emptyset.$$

Prosessia jatkamalla löytyy perheet $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ siten, että $\mathcal{F}_i$:n alkiot ovat erillisiä kaikilla i. Väitetään, että

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup \mathcal{F}_k \text{ jollekin } m \leq Q(n, \alpha, c) + 1.$$

Olkoon m siten, että $x \in A \setminus \cup_{k=1}^{m} \cup \mathcal{F}_k$. Nyt riittää osoittaa, että $m \leq Q(n, \alpha, c)$.

Koska joukot F_i peittävät A:n, niin on olemassa i siten, että $x \in F_i$. Täten kaikilla $k = 1, \dots, m$, $F_i \notin \mathcal{F}_k$, joka tarkoittaa $\mathcal{F}_k$:n konstruktion nojalla, että $F_i \cap F_{k,i_k} \neq \emptyset$ jollain i_k siten, että $d(F_{k,i_k}) \geq d(F_i)$ $(***)$. Nyt olkoon $B_i = B(x_i, d(F_i)) \supset F_i$, missä x_i on joukkoon F_i liittyvä piste ("keskipiste").

Olkoon $y_k \in F_i \cap F_{k,i_k}$. Suoraan määritelmän nojalla löytyy kartio

$$C(y_k, e, \alpha, cd(F_{k,i_k})) \subset F_{k,i_k}.$$

(***):n nojalla on myös voimassa

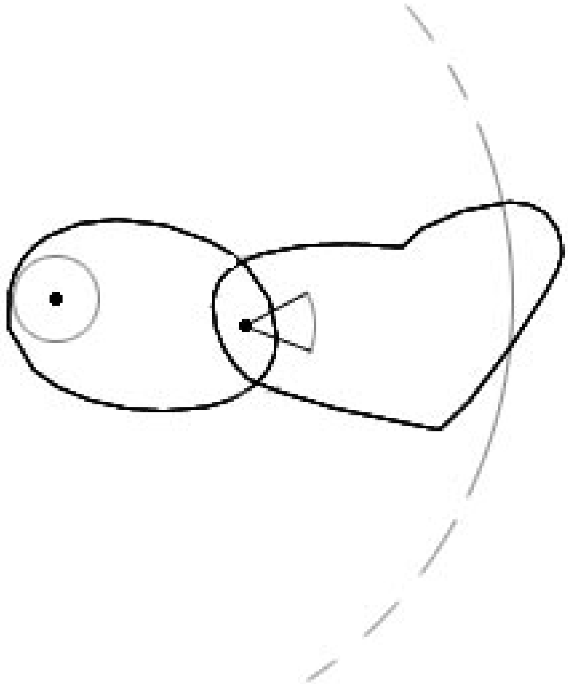
$$C(y_k, e, \alpha, cd(F_i)) \subset F_{k,i_k}.$$

Täten saadaan, että (kts. kuva 1.3)

$$C(y_k, e, \alpha, cd(F_i)) \subset ((c+1)B_i) \bigcap (F_k, i_k) \text{ kaikilla } k = 1, \dots, m$$

Olkoon nyt $H^{n-1}(S^{n-1}(0,1)) = \gamma(n)$ ja $\mathcal{L}^n(B(0,1)) = \beta(n)$, jolloin $\mathcal{L}^n(C(x, e, \alpha, 1) = (\alpha/\gamma(n))\beta(n)$, ja yleisemmin $\mathcal{L}^n(C(x, e, \alpha, h)) = (\alpha/\gamma(n))\beta(n)h^n$. Koska kukin $\mathbb{R}^n$:n piste sisältyy korkeintaan $P(n, \alpha, c)$ joukkoon F_{k,i_k}, niin tämä on myös totta pienemmille joukoille $C_k := C(y_k, e, \alpha, cd(F_i)) \subset F_{k,i_k}$, joten

$$\sum_{k=1}^{m} \chi_{C_k} \leq P(n, \alpha, c) \chi_{\cup_{k=1}^{m} C_k}$$



Kuva 1.3:

Koska $C_k \subset (c+1)B_i$ kaikilla k, saadaan

$$
\begin{aligned}
\beta(n)((c+1)d(F_i))^n &= \mathcal{L}^n((c+1)B_i) \geq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{m} C_k\right) \\
&= \int \chi_{\cup_{k=1}^m C_k} d\mathcal{L}^n \geq P(n,\alpha,c)^{-1} \int \sum_{k=1}^{m} \chi_{C_k} d\mathcal{L}^n \\
&= P(n,\alpha,c)^{-1} \sum_{k=1}^{m} \mathcal{L}^n(C_k) = P(n,\alpha,c)^{-1} m\beta(n)(\alpha/\gamma(n))(d(F_i))^n(c)^n
\end{aligned}
$$

Siis

$$m \leq (\frac{c+1}{c})^n P(n,\alpha,c)(\gamma(n)/\alpha) =: Q(n,\alpha,c)$$

Laajennetaan lopuksi todistus koskemaan rajoittamattomia joukkoja A. Olkoon $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{\infty} \overline{Q}_i$, missä $\overline{Q}_i$:t ovat suljettuja kuutioita, joiden sivun mitta on M_1 ja joiden vastaavat avoimet joukot Q_i ovat erillisiä. Nyt lause pätee joukoille $A \cap Q_i$ ja koska ainoastaan viereisten joukkojen(niiden lukumäärä riippuu n:stä) F_i:t voivat leikata, niin saadaan väite.

Huom. 2) kohdan todistuksessa saatiin F_i:t halkaisijan suhteen kokojärjestykseen viittaamalla A:n rajoittuneisuuteen. Tämä voidaan kuitenkin kiertää vaatimalla $d(F_i) \geq d(F_{i+1})$ **tai** $d(F_i) + \epsilon \geq d(F_{i+1})$, missä ϵ on pieni luku.

1.4 Huomioita

1) Vaatimus $\sup(d(F_i)) < \infty$ lauseessa 1.3 on oleellinen. Esimerkiksi olkoon $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ja $F_i = [0, 2i]$. Nyt $0 \in \cap_{k=1}^{\infty} F_{i_k}$, vaikka joukot F_i valitsisi miten tahansa. Jos A on rajoitettu, niin silloin vaatimusta $\sup(d(F_i)) < \infty$ ei välttämättä tarvita, kuten seuraavasta huomautuksesta nähdään.

2) Besicovitchin peitelause (palloille):
Olkoon A $\mathbb{R}$:n rajoitettu joukko. Olkoon kullekin $x \in A$ pallo $\overline{B}(x, r(x)) \in \mathcal{B}$. Nyt löytyy kokonaisluvut P(n) ja Q(n) s.e

1) On olemassa rajoitettu tai numeroituva kokoelma palloja $B_i \in \mathcal{B}$ siten, että ne peittävät A:n ja jokainen $x \in \mathbb{R}^n$ kuuluu korkeintaan P(n) joukkoon B_i t.s

$$\chi_A \leq \sum_i \chi_{B_i} \leq P(n)$$

2) On olemassa perheet $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{Q(n)} \subset \mathcal{B}$ siten, että $\mathcal{B}_i$:t koostuvat erillisistä joukoista t.s

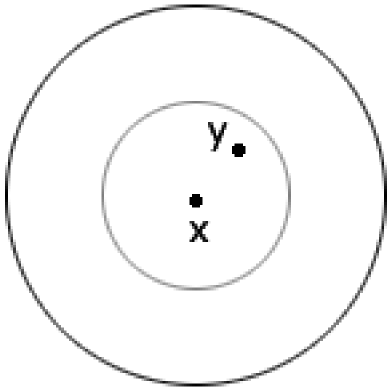
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q(n)} \bigcup B_i$$

ja

$$B \bigcap B' = \emptyset, \text{ kun } B, B' \in \mathcal{B}_i \text{ ja } B \neq B'.$$

Kuten jo aikaisemmin mainitsin, Besicovitchin alkuperäinen todistus (löytyy lähteestä Besicovitch) on tason kiekoille ja siinä todistetaan tämän todistuksen toinen osio saaden $Q(n) = 22$.

3) Toinen muotoilu lauseelle (Morse, 1947)
Morse todisti lauseen riippumattomasti Besicovitchiin nähden. Olkoon A



Kuva 1.4: Huomio 4

$\mathbb{R}^n$:n rajoitettu joukko. Kullekin $x \in A$ joukko H(x) toteuttaa seuraavat ominaisuudet: (a) On olemassa x:stä riippumaton $M > 0$ ja kaksi suljettua euklidista palloa keskipisteenään x, $B(x, r(x))$ ja $B(x, Mr(x))$, siten, että $B(x, r(x)) \subset H(x) \subset B(x, Mr(x))$; (b) Kaikille $z \in H(x)$, joukko $H(x)$ sisältää seuraavan joukon konveksin verhon

$$\{z\} \bigcup B(x, r(x))$$

Nyt voidaan valita perheestä $(H(x))_{x \in A}$ jono H_k, joka toteuttaa ehdot 1) ja 2) lauseessa 1.3.

Konveksi verho kyseisessä tapauksessa pienin mahdollinen joukko C, jolle pätee $z - y \in C$, kun $y \in B(x, r(x))$.

4) Lause 1.3 sisältää seuraavat erikoistapaukset:

i) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu. Olkoon $0 \leq M < 1$ ja kaikilla $x \in A$ on olemassa suljettu pallo $B(y, r(x))$ s.e $y \in B(x, Mr(x))$ toisin sanoen

$|x-y| \leq Mr(x)$. Nyt voidaan muodostaa perheen $\{B(y, r(x)) : x \in A\}$ (missä piste y täyttää yllä olevan ehdon) jäsenistä jono B_k, joka täyttää lauseen 1.3 ehdot 1) ja 2).

ii) Olkoon $A \in \mathbb{R}^n$ rajoitettu. Olkoon $c > 0$ ja kaikilla $x \in A$ on olemassa suljettu väli $R(x) = I_1(x) \times \ldots \times I_n(x) \subset \mathbb{R}^n$, jonka keskipisteenä x on. Vaaditaan, että $\mathcal{L}(I_i(x)) \leq c\mathcal{L}(I_j(x))$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$. Nyt voidaan valita perheestä $\{R(x) : x \in A\}$ jono R_k, joka toteuttaa ehdot 1) ja 2).

5) Joukkoihin liittyvä piste x ei saa sijaita joukon reunalla.
Lauseen 1.3 mukaisesti pisteen x ei tarvitse sijaita täsmälleen joukon keskellä, mutta se ei saa sijaita joukon reunassa. Esim. Olkoon $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ ja kutakin $x \in A$ vastaa väli $Q(x) = [x, x + 1]$. Selvästi nyt ei ole olemassa ehdon 1) mukaista P(1):stä.

Luku 2

Besicovitchin peitelauseen vakion arviointia

Tässä kappaleessa osoitetaan kuinka Besicovitchin lauseen (kakkososion) vakio voidaan liittää pallojen pakkausteoriaan ja käyttää siellä saatuja tuloksia hyväksi vakion arvioinnissa. Nämä vakiot ovat siis voimassa alkuperäiselle lauseelle eikä suinkaan edellisessä kappaleessa todistetulle versiolle peitelauseesta (kts. lause 2.7). Tämä luku pohjautuu suurelta osin lähteeseen Sullivan.

Yhdessä tämän luvun päälauseista (2.7) tarvitaan transfiniittistä induktiota. Siispä otetaan aluksi pieni katsaus ordinaaleihin ja transfiniittiseen induktioon. Asiasta kerrotaan tarkemmin Brucknerissa.

2.1 Transfiniittiset ordinaalit

Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on yksinkertaisin, ei-triviaali esimerkki hyvin järjestetystä joukosta. Luonnollisten lukujen joukossa järjestykselle voidaan asettaa seuraavat vaatimukset.

1. $n \not< n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$.

2. $m < n$ tai $n < m$ kaikille erillisille $m, n \in \mathbb{N}$.

3. Jos $n < m$ ja $m < p$, niin $n < p$ kaikille $n, m, p \in \mathbb{N}$

4. Jokaisella ei-tyhjällä osajoukolla $S \subset \mathbb{N}$ on ensimmäinen alkio. (t.s on olemassa alkio $n_0 \in S$ siten, että $n_0 < s$ pätee kaikille muille alkioille $s \in \mathbb{N}$).

Näiden neljän ehdon ollessa voimassa induktio toimii huolimatta siitä minkälainen itse joukko on, ei tarvitse rajoittua luonnollisiin lukuihin. Sanotaan, että joukko X on lineaarisesti järjestetty ja että "<" on aito järjestysrelaatio X:ssä, mikäli ominaisuudet 1, 2 ja 3 ovat voimassa. Mikäli kaikki neljä ominaisuutta ovat voimassa, sanotaan että joukko X on hyvin järjestetty. Jos X on hyvin järjestetty ja $x_0 \in X$, niin x_0:aa edeltävistä alkioista koostuvaa joukkoa kutsutaan X:n alkusegmentiksi.

Seuraavia lauseita ei todisteta. Ensimmäinen lause on ekvivalentti valinta-aksiooman kanssa.

2.1.1 Hyvinjärjestysperiaate

Jokainen joukko voidaan hyvinjärjestää. Siis mille tahansa joukolle X on olemassa relaatio $<$, joka on X:n aito järjestysrelaatio ja joka tekee joukosta hyvinjärjestetyn.

2.1.2 Numeroituvat ordinaalit

On olemassa hyvinjärjestetty ylinumeroituva joukko X varustettuna järjestysrelaatiolla $<$ siten, että

1. X:llä on viimeinen alkio, jota merkitään Ω:lla.
2. Jokaiselle $x_0 \in X$ ja $x_0 \neq \Omega$ alkusegmentti
$$\{x \in X : x < x_0\}$$
on numeroituva.
3. On olemassa alkio $\omega \in X$ siten, että
$$\{x \in X : x < \omega\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
ja relaatiolla $<$ on tavallinen merkitys ei-negatiivisten lukujen joukossa.

Siis joukko $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ei-negatiivisia lukuja on X:n alkusegmentti. X:ää voidaan ajatella pitkänä nollasta alkavana listana jatkuen, kunnes ylinumeroituvan monta alkiota on lueteltu:

$$0 < 1 < 2 \ldots < \omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \ldots < \omega^2 < \omega^2 + 1 < \ldots < \Omega.$$

X:n alkioita kutsutaan *ordinaaleiksi*. Kutakin alkiota ennen ω:aa kutsutaan *äärelliseksi ordinaaliksi*. Kutakin elementtiä tämän jälkeen, mutta ennen viimeistä alkiota Ω, kutsutaan *numeroituvaksi ordinaaliksi*. Alkiota Ω kutsutaan *ensimmäiseksi ylinumeroituvaksi ordinaaliksi*.

Alkio x voidaan samaistaa sellaisen alkusegmentin kanssa, joka sisältää kaikki x:ää edeltävät alkiot. Täten kutakin X:n elementtiä voidaan pitää X:n alijoukkona. Nyt jokaista alkiota (Ω:aa lukuunottamatta) voidaan pitää äärellisenä tai numeroituvana joukkojen tapaan. Ensimmäinen ääretön ordinaali on ω ja ensimmäinen ylinumeroituva ordinaali on Ω. Ordinaalin Ω mahtavuus on $\aleph_1$. Kontinuumihypoteesi sanoo, että reaalilukujen mahtavuus, c, on juuri $\aleph_1$. Kontinuumihypoteesi (KH) ei ole lause vaan pikemminkin aksiooma. Sen voi joko hyväksyä tai hylätä; kumpikaan ei aiheuta ristiriitaa ZFC-aksiomatiikan kanssa.

Mikäli KH oletetaan, niin reaaliluvut (tai kaikki saman mahtavuuden omaavat joukot) voidaan hyvinjärjestää edellisessä lauseessa kuvatulla tavalla. Mikäli KH:ta ei haluta olettaa, niin transfiniittinen induktio voidaan silti suorittaa. Tässä tapauksessa edellisen lauseen sijaan pitää käyttää seuraavaa lausetta.

2.1.3 Lemma

Mikä tahansa joukko X, jonka mahtavuus on $2^{\aleph_0}$ voidaan hyvinjärjestää siten, että kullekin $x \in X$, kaikkien x:n edeltäjien joukon mahtavuus on aidosti pienempi kuin $2^{\aleph_0}$, missä $2^{\aleph_0}$ on luonnollisten lukujen osajoukkojen joukon mahtavuus.

Todistus sivuutetaan.

Jokaisella alkiolla x viimeistä lukuunottamatta on seuraava alkio, jota merkitään x+1:llä. Kaikilla alkioilla ei ole välttämättä olemassa edeltäjää (kuten ω ja Ω). Tällaisia alkioita kutsutaan rajaordinaaleiksi.

Seuraavassa esimerkki, jolla valoitetaan transfiniittisen induktion käyttöä.

2.1.4 Lemma

Olkoon $\mathcal{C}$ joukko välin $[a, b)$ osavälejä siten, että jokaiselle $a \leq x < b$ on olemassa y, $x < y < b$ ja $[x, y) \in C$. Nyt on olemassa numeroituva erillinen perhe $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ siten, että

$$\bigcup_{[x,y)\in\mathcal{E}} [x, y) = [a, b)$$

Todistus: Olkoon $x_0 \in [a, b]$ ja valitaan $x_1 < b$ siten, että $[x_0, x_1) \in \mathcal{C}$. Oletetaan, että kullekin ordinaalille α on valittu $x_\beta < b$ siten, että $[x_\beta, x_{\beta+1}) \in \mathcal{C}$ kaikille β, joilla $\beta + 1 < \alpha$. Nyt x_α voidaan valita seuraavasti: (i) Jos α on rajaordinaali, niin olkoon $x_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} x_\beta$. (ii) Jos α ei ole rajaordinaali, niin olkoon α_0 α:n välitön edeltäjä ja oletetaan, että $\alpha_0 < b$. Otetaan $x_\alpha < b$ siten, että $[x_{\alpha_0}, x_\alpha) \in \mathcal{C}$. Prosessi pysähtyy, jos $x_{\alpha_0} = b$.

Nyt perhe $\mathcal{E} = \{[x_{\alpha-1}, x_\alpha)\}$ on $\mathcal{C}$:n erillinen numeroituva perhe siten, että $\cup_{[x,y)\in\mathcal{E}}[x, y) = [a, b)$.

Jatketaan vielä tässä luvussa tarvittavien määritelmien parissa.

2.2 Määritelmä (Oikealta jatkuvuus)

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *oikealta jatkuva*, joss $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

2.3 Määritelmä (ϵ-melkein ulkopuolella)

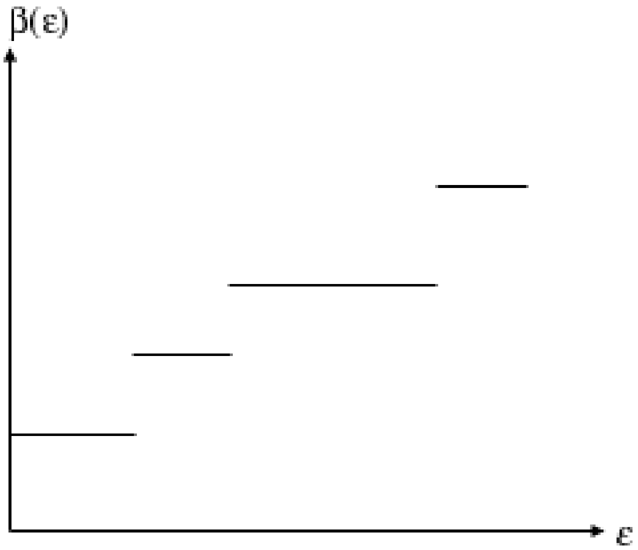
Suljetun pallon $B(y, s)$ keskipiste on pallon $B(x, r)$ ulkopuolella jos ja vain jos keskipisteiden välimatka toteuttaa $d := |x-y| > r$. Annetulle $\epsilon \leq 0$ sanotaan, että pallon $B(y, s)$ keskusta on *ϵ -melkein pallon $B(x, r)$ ulkopuolella* joss $d \geq r - \epsilon s$.

2.4 Määritelmä (Palloperheen kontrolloituvuus)

Palloperhettä C kutsutaan *ϵ-kontrolloiduksi*, joss kukin C:n pallon keskusta on ϵ-melkein toisten C:n pallojen ulkopuolella. On huomattava, että C on 0-kontrolloitu, joss kunkin pallon keskusta on toisten avoimien pallojen ulkopuolella. C:n jäsen on *ϵ-melkein pienin*, jos sen säde $r_0 \leq (1 + \epsilon) \inf_C r$ t.s säde r_0 on tekijän $1 + \epsilon$ sisällä C:n pallojen säteen infimumista.

2.5 Määritelmä ($\beta_n(\epsilon)$)

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ siten, että löytyy $\{B_1, \ldots, B_k\}$ ϵ-kontrolloitu $\mathbb{R}^n$ palloperhe, jolle $d(B_k) \leq d(B_i) \forall i < k$ ja $B_i \cap B_k \neq \emptyset$ $\forall i = 1, \ldots, k - 1$. Määritellään $\beta_n(\epsilon)$ maksimiksi tällaisista luvuista k.



Kuva 2.1:

2.6 Huomautus

Funktio $\beta_n(\epsilon)$ on monotoninen (kasvava) ϵ:n suhteen, sillä ϵ-kontrolloitu palloperhe on myös ϵ'-kontrolloitu kaikilla $\epsilon' > \epsilon$. Voi kohtuullisen helposti todistaa, että $\beta_n(\epsilon)$ on oikealta jatkuva (kuvassa 2.1 on luonnos kuvaajasta). Funktio $\beta_n(\epsilon)$ saa vain kokonaislukuarvoja ja on kasvava. Olkoon ϵ_1 epäjatkuvuuspiste (joita on numeroituva, itse asiassa äärellinen, määrä). Nyt oikealta jatkuvuus tässä pisteessä seuraa ϵ-melkein ulkopuolella -määritelmästä (2.3), jonka mukaan pallo on ϵ-melkein toisen pallon ulkopuolella, mikäli $d \geq r - \epsilon s$. Jos tässä olisi aito epäyhtälö ($d > r - \epsilon s$), niin funktio olisi vasemmalta jatkuva. Nyt on olemassa raja-arvo

$$\beta_n := \beta_n(0) = \lim_{\epsilon \to 0+} \beta_n(\epsilon)$$

jota kutsutaan Besicovitchin vakioksi $\mathbb{R}^n$:ssä. Besicovitchin peitelause (kohta 2) sanoo, että jos joukko A peitetään palloperheellä, jossa jokaiseen A:n pisteeseen liittyy pallo, niin tämä peite voidaan korvata tietyllä äärellisellä lukumäärällä q_n erillisiä palloperheitä, joiden yhdisteet silti peittävät A:n.

Todistetaan seuraavassa lauseessa, että $\beta_n = q_n$. Jatkossa kytketään β_n pallojen pakkausongelmaan.

Seuraavassa todistetaan Besicovitchin peitelauseen kakkososio palloille.

2.7 Lause

Oletetaan, että meillä on joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ peitettynä perheellä C suljettuja rajoitettusäteisiä palloja siten, että kutakin pistettä $a \in A$ kohti on olemassa pallo C:ssä, jonka keskipiste on a. Nyt voidaan löytää aliperheet $C_i \subset C$, $i = 1, \ldots, \beta_n$, siten että $A \subset \cup_i \cup C_i$ ja pallot kussakin perheessä C_i ovat erillisiä.

Todistus Riittää todistaa, että lause pätee luvulla $\beta_n(\epsilon)$ kaikilla $\epsilon > 0$. Otetaan siis alussa mielivaltainen $\epsilon > 0$. Aloitetaan niin, että jokainen C_i, $i = 1, \ldots, \beta_n$, on tyhjä. Muodostetaan transfiniittisen induktion avulla hyvin järjestetty alipeite $C' = \{B_1, B_2, \ldots\}$ C:stä siten, että valitaan jokaisella askeleella, α, pallo B_α, jonka keskusta ei kuulu joukkoon $\cup_{\gamma<\alpha} B_\gamma$ ja jonka säde on ϵ-melkein suurin (ts. $r_\alpha > (1/(1+\epsilon) \sup\{r : B(x,r) \in C, x$ ei ole vielä peitetty $\})$. Nyt lähdetään käymään järjestyksessä lävitse saatua hyvin järjestettyä alipeitettä siten, että sijoitetaan B_α johonkin C_i:hin, jossa se ei leikkaa mitään muuta siihen kuuluvaa palloa. Osoitetaan , että tämä on tosiaankin aina mahdollista jollakin i.

Nyt täytyy tarkastaa, että jokin C_i on käytettävissä kussakin askeleessa. Jos ei, niin kussakin aliperheessä C_i on olemassa pallo $B_i \in C_i$, joka leikkaa palloa B_α. Nyt väitetään, että pallot B_i yhdessä B_α:n kanssa muodostavat ϵ-kontrolloidun perheen. Jos B_i on valittu ennen B_j:tä, niin B_i ei voi sisältää B_j:n keskustaa. Lisäksi B_j on ϵ-melkein pienempi kuin B_i. Tämä tarkoittaa, että B_i:n keskusta on ϵ-melkein B_j:n ulkopuolella, sillä $r_i \geq r_j/(1+\epsilon)$,

$$|x_i - x_j| \geq r_i \geq r_j - \epsilon r_i.$$

B_α on perheen ϵ-melkein pienin alkio, koska se on valittu viimeksi. Siis tosiasia, että kukin B_i leikkaa B:tä on ristiriidassa $\beta_n(\epsilon)$:n kanssa. $\square$

2.8 Määritelmä ($\delta_n(r)$)

Annetulle säteelle r, olkoon $\hat{\delta}_n(r)$ suurin mahdollinen luku, joka (avoimia) n-ulotteisia erillisiä yksikköpalloja voidaan pakata palloon, jonka säde on r+1 ja vastaavasti olkoon $\delta_n(r)$ suurin mahdollinen pakkausluku kuten yllä paitsi, että yhden pitää olla keskellä.

2.9 Huomautus

Selvästi $\delta_n(r) \leq \hat{\delta}_n(r)$. Kumpikin funktio on kasvava ja oikealta jatkuva. Kun $r < 2$, niin $\delta_n(r) = 1$, ja jos $r < 1$, niin $\hat{\delta}_n(r) = 1$.

2.10 Lause

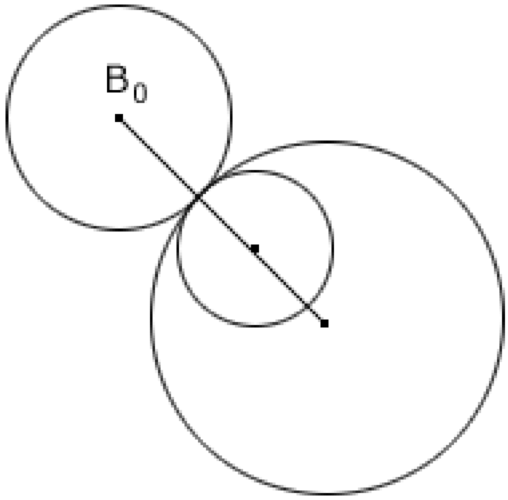
$\beta_n = \delta_n(4)$.

Todistus:

β_n on siis 0-kontrolloidun palloperheen C alkioiden maksimaalinen lukumäärä. Siis perheen, jonka kaikki suljetut pallot leikkaavat jotain perheen pienintä alkiota siten, että kunkin keskusta on toisten avoimien pallojen ulkopuolella. Skaalataan annettua perhettä C siten, että kyseessä oleva pienin pallo on nyt $B(0, 1) = B_0$. Nyt väitetään, että voimme korvata perheen C perheellä yksikköpalloja joiden keskipisteet ovat korkeintaan etäisyydellä 2 origosta, ja lisäksi perhe on 0-kontrolloitu.

Tehdään tämä korvaamalla kukin pallo C:ssä yksikköpallolla. Jos pallon keskipiste on korkeintaan kahden yksikön etäisyydellä keskustasta, keskipiste säilyy samana. Jos keskipiste on yli kahden yksikön päässä keskustasta siirretään se keskustan ja alkuperäisen keskipisteen välistä suoraa myöten etäisyydelle kaksi keskustasta. Koska alkuperäisten pallojen säteet olivat suurempia kuin yksi (skaalauksen jälkeen), ja ne leikkasivat palloa B_0, uudet pallot ovat korvaamiensa sisällä (kts. kuva 2.2). Ne kaikki leikkaavat edelleen B_0:aa, joten pitää ainoastaan testata ovatko keskustat toisten pallojen ulkopuolella.

Koska tämä oli totta alkuperäisille palloille, on se myös totta paikallaan pysyneille palloille. Etäisyydelle kaksi liikutetut pallot eivät voi sisältää paikallaan olleiden pallojen keskipisteitä, sillä jos liikutettu pallo sisältäisi jonkun pallon keskipisteen, niin myös vastaava alkuperäinen pallo sisältäisi samaisen pallon keskipisteen. Siispä pitää ainoastaan tarkastaa, että kahden liikutetun pallon keskipisteet sijaitsevat toistensa ulkopuolella. Olkoon meillä kaksi palloa, joiden etäisyydet keskustasta olivat alussa $1 + r$ ja $1 + s$, missä $1 < s \leq r$. Niiden säteet olivat vähintään r ja s, niinpä niiden keskustojen välinen etäisyys oli vähintään r. Kosinilauseen mukaisesti keskustan ja



Kuva 2.2:

ympyröiden keskipisteiden muodostaman kolmion keskustakulman kosini on seuraavaa

$$
\begin{aligned}
cos(\theta) &= \frac{(1+r)^2+(1+s)^2-c^2}{2(1+r)(1+s)} \\
&\leq \frac{(1+r)^2+(1+s)^2-r^2}{2(1+r)(1+s)} = 1 - \frac{2rs-s^2}{2(1+r)(1+s)} \\
&\leq 1 - \frac{1}{2}\frac{r}{1+r}\frac{s}{1+s} \leq 1 - \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Koska 7/8 on täsmälleen kolmion, jonka sivut ovat (2,2,1), kulman kosini, niin liikutettujen kolmioiden etäisyys on vähintään yksi ja täten ympyröiden keskipisteet eivät sisälly toisiin ympyröihin.

Kutistetaan saatuja palloja kertoimella $1/2$, jolloin palloista saadaan erillisiä. Seuraavaksi skaalataan saatua rakennelmaa kertoimella kaksi. Nyt on saatu erillisiä yksikköpalloja, joiden etäisyys keskustasta on korkeintaan neljä ja yksi palloista sijaitsee keskustassa. Siis väite on todistettu.

Yritetään seuraavaksi saada jonkinlaisia arvioita $\delta_n(r)$:lle. Yksikköpallojen pakkaaminen tietyn kokoiseen palloon on pakkausteoreettinen ongelma, eikä tarkoitukseni ole mennä kovin syvällisesti aiheeseen, vaan todistan asiaan liittyviä pienempiä lauseita ja vain totean päätulokset.

Helppo tilavuusarviointi antaa $\hat{\delta}_n(r) \leq (r+1)^n$. Tästä seuraa, että $\beta_n < 5^n$. Tämä on kuitenkin vain karkea arvio. Lähestytään asiaa seuraavan apulauseen avulla, joka kertoo että pallot voidaan jakaa pallonkuorille.

2.11 Lemma

Jos kahden erillisen yksikköpallon keskustat on pallokuoren $\widetilde{r} \leq |x| \leq r$ sisällä, missä $\widetilde{r} = r - 4/r$, niin siirtämällä pallojen keskipisteet säteittäisesti etäisyyden r päähän keskipisteestä (r-säteiselle pallokuorelle) ne ovat edelleen erillisiä.

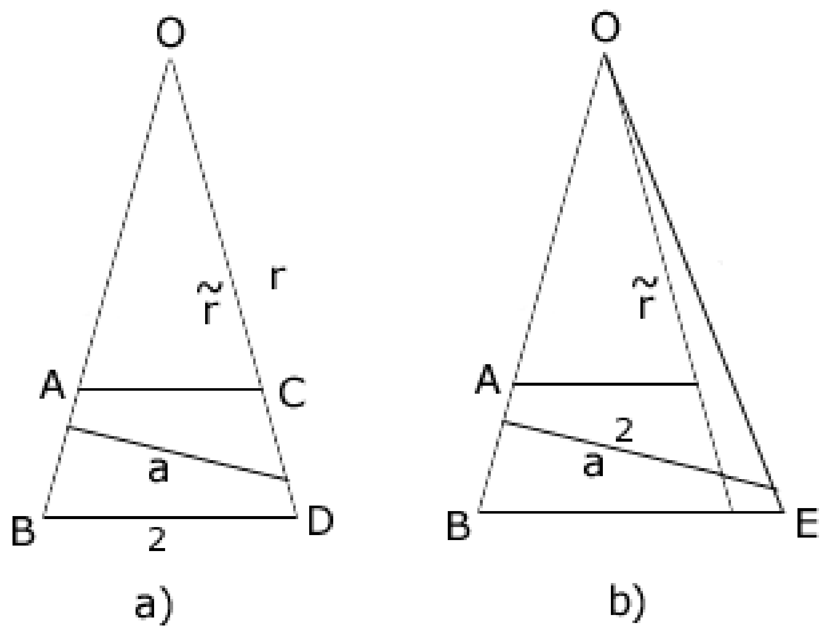
Todistus: Tutkitaan kuvan 2.3 (a) piirrosta. Riittää osoittaa, että $||a|| \leq 2$, kun janan a toinen pää on pisteiden A ja B välissä sekä toinen pää pisteiden C ja D välissä. Sillä jos tämä on totta, niin siirrettäessä erilliset pallot (joiden keskipisteiden etäisyys toisistaan on suurempi kuin kaksi) r:n etäisyydelle origosta O, niiden keskipisteiden etäisyys(eli kuvassa b) B:n ja E:n) toisistaan on suurempi kuin kaksi, jolloin pallot ovat erillisiä. Selvästi suurin mahdollinen $d(a)$ saadaan asettamalla toinen pää B:hen ja toinen C:hen. Kosinilauseen avulla (muodostamalla kaksi kosinilausetta, ratkaisemalla toisen $cos\alpha$:n suhteen ja sijoittamalla sen toiseen) saadaan $||a||$:n yhtälöksi

$$x^2 = \widetilde{r}^2 + r^2 - 2r\widetilde{r}(1 - 2/r^2)$$

Nyt sijoittamalla $\widetilde{r} = r - 4/r$:n ja sieventämällä saadaan, että $||a|| = 2$. Koska tämä oli suurin mahdollinen etäisyys, niin $||a|| \leq 2$ edellämainituilla ehdoilla. Siis väite on todistettu.

2.12 Määritelmä (M(n,r))

Olkoon M(n,r) r-säteiselle pallopinnalle mahtuvien erillisten yksikköpallojen maksimilukumäärä (pallojen keskipisteiden sijaitessa kuorella).



Kuva 2.3:

2.13 Lause

$\delta_n(r)$:lle saadaan seuraavat rajat:

$$M(n,r) + \delta_n(r-2) \leq \delta_n(r) \leq M(n,r) + \delta_n(r - 4/r),$$

missä $r \geq 2$.
Todistus: Oletetaan, että meillä on $\delta_n(r)$ yksikkösäteistä palloa pakattuna $r+1$ -säteiseen palloon. Lemma 2.11 sanoo, että mikä tahansa pallo, jonka keskipiste sijaitsee etäisyyksien $r' := r - r/4$ ja r välissä, voidaan työntää säteittäisesti etäisyydelle r niiden säilyessä edelleen erillisinä. Tästä seuraa yläraja. Alaraja seuraa siitä, että etäisyydellä $r-2$ olevat yksikköpallot eivät voi leikata etäisyydellä r olevia palloja.

2.14 Huomautus

Edellinen lause pätee myös $\hat{\delta}_n$:lle.

Käytettäessä lausetta r:n arvolle neljä kahteen kertaan saadaan seuraava seurauslause:

2.15 Seuraus

Besicovitchin vakio β saa seuraavat rajat:

$$M(n,4) + M(n,2) + 1 \leq \beta_n \leq M(n,4) + M(n,3) + 1$$

2.16 Seuraus

$$\hat{\delta}_n(4) \leq M(n,4) + M(n,3) + M(n,5/3)$$

2.17 Määritelmä

Funktio $f(n)$ kasvaa eksponentiaalisesti kannan b suhteen, jos

$$\log b = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log f(n)$$

Besicovitchin vakiolle saadaan arvio:

2.18 Lause

$\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 19$, $67 \leq \beta_3 \leq 87$, $226 \leq \beta_4 \leq 331$, $681 \leq \beta_5 \leq 1159$. Lisäksi Besicovitchin vakio β_n kasvaa eksponentiaalisesti kantaluvun ollessa vähintään $8/\sqrt{15}$ ja enintään 2.641.

Todistus: Sivuutetaan. Katso Sullivan.

2.19 Huomautus

Todelliset β_n:n arvot ovat mitä todennäköisimmin lähellä alarajoja.

Luku 3

Peitelauseen sovelluksia

3.1 Vitalin yleinen peitelause

Olkoon μ Radonin mitta $\mathbb{R}^n$:ssä sekä $\mathcal{B}$ perhe suljettuja palloja ja $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että jokainen A:n piste on keskipiste mielivaltaisen pienille $\mathcal{B}$:n palloille toisin sanoen

$$\inf\{r : B(x,r) \in \mathcal{B}\} = 0 \quad \forall x \in A$$

Tällöin $\exists$ erilliset $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$ s.e

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A) = 0$$

Todistus: Oletetaan ensin, että A on rajoitettu. Laajennetaan lopussa tarkastelu koskemaan yleistä tapausta.
Olkoon U avoin joukko s.e $A \subset U$ ja

$$\mu(U) \leq (1 + \frac{1}{4Q})\mu(A)$$

missä $Q := Q(n)$ on kuten Besicovitchin peitelauseessa (alkuperäinen versio, kts. 1.4, kohta 2).
Besicovitchin peitelauseesta seuraa, että on olemassa erillisten pallojen muodostamat perheet $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_Q$ siten, että

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q} \bigcup_{\mathcal{B}_i} B$$

Tästä seuraa, että

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{Q} \mu(\cup \mathcal{B}_i).$$

Tämän mukaan täytyy olla olemassa perhe $\mathcal{B}_l$, jolle

$$\mu(\bigcup_{\mathcal{B}_l} B) \geq \frac{1}{Q}\mu(A).$$

Nyt on olemassa erilliset pallot $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}_l$ siten (perheen $\mathcal{B}_l$ pallot ovat erillisiä) , että

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{k_1} B_i) \geq \frac{1}{2Q}\mu(A)$$

Merkitään $A_1 = A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i$, jolloin

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) &\leq \mu(U \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i) = \mu(U) - \sum_{i=1}^{k_1} \mu(B_i) \\
&\leq (1 + \frac{1}{4Q})\mu(A) - \frac{1}{2Q}\mu(A) = \underbrace{(1 + \frac{1}{4Q} - \frac{1}{2Q})}_{:=\lambda} \mu(A) \\
&= \lambda\mu(A)
\end{aligned}$$

Joukko $A_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i$ on rajoitettu, joten on olemassa avoin U_1 siten, että

$$A_1 \subset U_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i \text{ ja } \mu(U_1) \leq (1 + \frac{1}{4Q})\mu(A_1)$$

Jatketaan päättelyä induktiivisesti eteenpäin, jolloin saadaan

$$\mu(A_2) \leq \lambda\mu(A_1) \leq \lambda^2\mu(A) \text{ ,missä}$$

$$A_2 = A_1 \setminus \bigcup_{i=k_1}^{k_2} B_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_2} B_i.$$

Näin jatkamalla saadaan $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ja erilliset $B_1, \ldots, B_{k_m}$ s.e $\mu(A_m) \leq \lambda^m\mu(A)$, missä $A_m = A \setminus \bigcup_{i=k_1}^{k_2} B_i$.

Täten $B_1, B_2, \dots$ on vaadittu jono (koska $\lambda^m \to 0$).

Mikäli A on rajoittamaton $\mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{\infty} \overline{I}_j$, missä I_j avoin väli $I_j \cap I_k = \emptyset$ kaikilla $j \neq k$ ja $\mu(\partial I_j) = 0$, koska $\mu(v + te) = 0$, lukuunottamatta korkeintaan numeroituvan monta lukua $t \in \mathbb{R}^n$ jokaiselle (n-1)-ulotteiselle tasolle v ja sitä vastaan kohtisuoralle vektorille $e \in \mathbb{R}^n$.

3.2 Hausdorffin mitta

Seuraavassa lauseessa käytetään juuri todistettua Vitalin peitelausetta todistettaessa, että $\mathbb{R}^n$:ssä Lebesguen ja Hausdorffin mitat ovat vakiota vaille ekvivalentit.

3.2.1 Määritelmä(Hausdorffin mitta)

Jokaiselle $\epsilon > 0$ ja $E \subset \mathbb{R}^n$ olkoon

$$H_\epsilon^n(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} d(A_i)^n : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, d(A_i) < \epsilon\}$$

Hausdorffin mitta on nyt

$$H^n(E) = \lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon^n(E)$$

Huomautus:
$H_\delta^n(A) \leq H_\epsilon^n(A)$, kun $0 < \epsilon < \delta$, joten raja-arvo on olemassa tai se on ääretön. Lisäksi H_ϵ^n on mitta (kun $n \geq 0$).

Todistetaan ensin apulause, jota tarvitaan varsinaisessa todistuksessa.

3.2.2 Lause(5-r peitelause)

Olkoon $\mathcal{B}$ perhe $\mathbb{R}^n$:n suljettuja palloja ja $M = \frac{1}{2} sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty$. Tällöin on olemassa erilliset pallot $B_1, B_2, ... \in \mathcal{B}$ s.e

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \subset \bigcup_i 5B_i,$$

missä

$$5B = \overline{B}(x, 5r), \text{ kun } B = \overline{B}(x, r)$$

Todistus: Yksinkertaistetaan hieman lausetta olettamalla, että $\mathcal{B} = \{\overline{B}(x, r(x)) : x \in A\}$ ja A rajoitettu. (A on siis pallojen keskipisteitten muodostama joukko) Yleisestä tapauksesta käsitellään lopussa.
Olkoon $A_1 = \{x \in A : 3/4M < r(x) \leq M\}$.

Valitaan $x_1 \in A_1$ ja merkitään $B_1 = B(x_1, r(x_1))$.
$x_2 \in A_1 \backslash 3B_1$ (mikäli löytyy)
.
$x_{k+1} \in A_1 \backslash \cup_{i=1}^k 3B_i$, niin kauan kuin $A_1 \backslash \cup_{i=1}^k 3B_i \neq \emptyset$

Nyt $d(x_i, x_j) \geq 3(3/4)M = (9/4)M$, joten pallot ovat erillisiä. Koska $r(x_i) > 3/4M$, pallot erillisiä ja A on rajoitettu, niin edellinen prosessi pysähtyy ja merkitään tätä lukua k_1:lle. Täten saadaan

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 3r(x_i))$$

Koska $r(x) \leq 2r(x_i)$, kun $x \in A_1, i = 1, 2, \ldots, k_1$, niin saadaan

$$\bigcup_{x \in A_1} B(x, r(x)) \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 5r(x_i)).$$

Olkoon

$$A_2 = \{x \in A : (\frac{3}{4})^2 M < r(x) \leq \frac{3}{4}M\}$$

$$A_2' = \{x \in A_2 : B(x, r(x)) \cap \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, r(x_i)) = \emptyset\}$$

Jos $x \in A_2 \backslash A_2'$, niin on olemassa $i \in \{1, \ldots, k_1\}$ siten, että $B(x, r(x)) \cap B(x_i, r(x_i)) \neq \emptyset$. Lisäksi

$$d(x_i, x) \leq r(x) + r(x_i) \leq 3r(x_i)$$

sillä $r(x) \leq 2r(x_i)$. Täten

$$A_2 \backslash A_2' \subset \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 3r(x_i)) \qquad (1)$$

Valitaan jokin $x_{k_1+1} \in A_2'$ ja tämän jälkeen induktiivisesti

$$x_{k+1} \in A_2' \backslash \bigcup_{i=k_1+1}^{k} B(x_i, 3r(x_i)).$$

Kuten aikaisemmin, saadaan k_2 siten, että pallot $B(x_i, r(x_i)), i = 1, \ldots, k_2$ ovat erillisiä ja

$$A_2' \subset \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} B(x_i, 3r(x_i)).$$

Yhdistämällä tämä (1):n kanssa saadaan

$$\bigcup_{x \in A_2} B(x, r(x)) \subset \bigcup_{i=1}^{k_2} B(x_i, 5r(x_i)).$$

Jatkamalla samalla tavalla saadaan väitteen mukainen pallojono muodostettua.

Alussa rajoituttiin tarkastelemaan tapausta, jossa keskipisteiden joukko on rajoitettu. Lisätään sääntö, jonka mukaan pistettä ei saa valita, jos se on liian kaukana valitusta kiinteästä pisteestä $a \in \mathbb{R}^n$. Siis voidaan määrätä, että $d(x, a) > 2d(x, y)$, missä x ja y ovat mahdollisia valintoja. Väite pätee nyt joukoille $B(x, i) \cap A \ \forall i$, joten se pätee myös rajoittamattomalle joukoille.

Toisekseen alussa oletettiin, että kutakin pistettä vastaa täsmälleen yksi pallo. Jos palloja on enemmän kuin yksi, voidaan valita yksi pallo kutakin x:ää kohti siten, että $r(x) > \frac{9}{10} sup\{r : B(x, r) \in \mathcal{B}\}$.

Huomautus: Käyttämällä Hausdorffin maksimaalisuusperiaatetta saadaan lyhyempi todistus ja samalla yleisempi tulos; esimerkiksi palloperhe voidaan korvata useilla erilaisilla joukkoperheillä. Asiasta enemmän Federer [2.8.4-6]

3.2.3 Lause

Olkoon $\beta(n)$ yksikköpallon $B^n(0, 1)$ tilavuus. ja $E \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin $H^n(E) = 2^n \beta(n)^{-1} m(E)$.

Todistus: Osoitetaan ensin, että $H^n_\epsilon(E) \leq 2^n \beta(n)^{-1} m(E)$, millä tahansa $\epsilon > 0$. Tarkastellaan ensin tapausta, missä $m(E) = 0$ ja E on rajoitettu. Jokaisella $\eta > 0$ olkoon $E \subset U$ avoin joukko jolle $m(U) < \eta$. Koska U on avoin, se voidaan esittää yhdisteenä suljetuista palloista $U = \cup B_i$ siten, että $d(B_i) < \epsilon$ kaikilla palloilla B_i. Lauseen 3.2.2 nojalla on olemassa pistevieraiden pallojen muodostama osaperhe $\mathcal{F}$ siten, että

$$U \subset \{\bigcup 5B : B \in \mathcal{F}\}.$$

Siksi

$$\begin{aligned}
H^n_\epsilon(E) &\leq H^n_\epsilon(U) \\
&\leq \sum_{B_i \in \mathcal{F}} H^n_\epsilon(5B_i) \\
&\leq \sum_{B_i \in \mathcal{F}} d(5B_i)^n \\
&= \sum_{B_i \in \mathcal{F}} 5^n d(B_i)^n \\
&= 5^n \frac{2^n}{\beta(n)} \sum_{B_i \in \mathcal{F}} m(B_i) \\
&\leq 5^n \frac{2^n}{\beta(n)} m(U) \\
&< 5^n \frac{2^n}{\beta(n)} \eta
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $H^n(E) = 0$. Tapauksessa, jossa E on rajoittamaton, tarkastellaan joukkoja $E \cap B(0,i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Kaikkien näiden joukkojen Hausdorffin mitta on nolla ja täten myös E:n.

Olkoon E mielivaltainen joukko, jolle $m(E) < \infty$. Soveltamalla tässä luvussa todistettua Vitalin yleistä peitelausetta on mahdollista löytää pistevieraiden suljettujen pallojen $B_1, B_2, \ldots$ perhe $\mathcal{F}$ siten, että ja $d(B_i) < \epsilon$, $i = 1, 2, \ldots$ ja

$$m(E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$$

sekä

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \leq m(E) + \eta$$

Olkoon $E^* = \cup_{i=1}^{\infty}(E \cap B_i)$ ja havaitaan, että $E = (E \backslash E^*) \cup E^*$, missä $m(E \backslash E^*) = 0$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
H^n_\epsilon(E^*) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} d(B_i)^n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^n}{\beta(n)} m(B_i) \\
&\leq \frac{2^n}{\beta(n)} m(E) + \eta
\end{aligned}$$

Koska η ja ϵ ovat mielivaltaisia, niin $H^n(E^*) \leq 2^n\beta(n)^{-1}m(E)$. Kuitenkin $H^n(E) \leq H^n(E \backslash E^*) + H^n(E^*) = H^n(E^*)$, sillä $H^n(E \backslash E^*) = 0$, koska $m(E \backslash E^*) = 0$. Siis $H^n(E) \leq 2^n\beta(n)^{-1}m(E)$.

Osoittaaksemme vastakkaisen epäyhtälön, otetaan käyttöön *isodiametrinen epäyhtälö*, jonka mukaan kaikista joukoista $E \subset \mathbb{R}^n$, joiden halkaisija on r, pallolla on suurin Lebesguen mitta. Eli

$$m(E) \leq 2^{-n}\beta(n)d(E)^n,$$

missä $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $\beta(n)$ on yksikköpallon tilavuus. Todistus FE [s. 197]. Olkoon E_i:t joukkoja siten, että $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ ja $d(E_i) < \epsilon$ sekä

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^n < H_\epsilon^n(E) + \eta$$

Soveltamalla isodiametristä epäyhtälöä jokaiselle E_i saadaan

$$\begin{aligned} 2^n\beta(n)^{-1}m(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^n\beta(n)^{-1}m(E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^n\beta(n)^{-1}2^{-n}\beta(n)d(E_i)^n \\ &< H_\epsilon^n(E) + \eta. \end{aligned}$$

Koska ϵ ja η ovat mielivaltaisia, niin saadaan , että $2^n\beta(n)^{-1}m(E) \leq H^n(E)$.

Yhdistämällä edellä saadut tulokset saadaan väite $H^n(E) = 2^n\beta(n)^{-1}m(E)$.

Kirjallisuutta

[Besicovitch] A.S. Besicovitch *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions* (I),(II), Proc. Cambridge Philos. Soc. 41 (1945), 103-110; 42 (1946), 1-10.

[Bruckner] A.M. Bruckner, J.B. Bruckner, B.S. Thomson *Real Analysis*, Upper Saddle River (1997).

[Federer] H. Federer *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, (1969).

[Furedi] Z. Furedi ja P. Loeb *On the best constant for Besicovitch covering theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., 121 (1994) 1063-1074.

[Guzman] M. de Guzman *Differentation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Springer-Verlag, (Num. 481).

[Kokkonen] T. Kokkonen *Peitelauseita ja niiden sovellutuksia*, Pro Gradu, Jyväskylä (1994)

[Mattila] P. Mattila *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge University Press, (1995).

[Mattila*] P.Mattila *Reaalianalyysin luennot keväältä 1999*, Jyväskylän yliopisto.

[Morse] A.P Morse *Perfect Blankets*, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 418-442.

[Sullivan] J.M Sullivan *Sphere packings give bound for the Besicovitch covering theorem*, J. Geom. Anal., Vol.4 Num.2 (1994).